Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 16 — 8. Dezember 2022

Hinweis: Für die Aufgaben 1 und 2 darf weiterhin ohne Beweis benutzt werden, dass die Quadratwurzel monoton wachsend ist.

Aufgabe 1: *(1+2 Punkte)* Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad \text{für } n \geq 1\,.$$

(a) Zeige, dass $a_n^2 \geq 2$ für alle $n \geq 2$ gilt.

(b) Beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Hinweis: Zeige, dass $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist.

Aufgabe 2: *(2+2 Punkte)* Für positive reelle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ definieren wir zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := (a+b)/2$, $b_1 := \sqrt{ab}$ und

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{sowie} \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Zeige die Ungleichungen

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und denselben Grenzwert haben.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sei die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_n := \frac{1}{3}\left(2a_{n-1} + a_{n-2}\right) \qquad \text{für } n \geq 3.$$

Vermute und beweise per Induktion nach n eine Formel für die Differenzen

$$a_n - a_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Zeige damit, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimme den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Weihnachtsaufgabe.

Ausgabedatum: 8. Dezember 2022 **Abgabetermin:** 12. Dezember 2022, 10:00 Uhr.